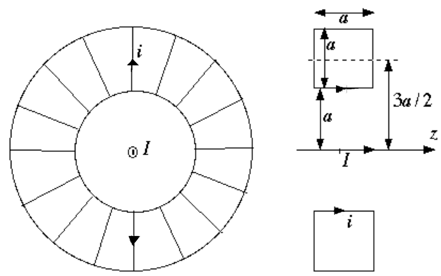
Pince ampèremétrique.

Une pince ampèremétrique est constituée d'un tore de section carrée de côté $a = 5$ cm, d'axe Oz et de rayon moyen $3/2\,a$, sur lequel on a bobiné N spires régulièrement espacées. Ce circuit de résistance R est fermé sur un ampèremètre de résistance négligeable. Un fil infini confondu avec Oz parcouru par un courant $I(t) = I_m\,\cos(\omega\,t)$ génère en régime sinusoïdal forcé un courant $i(t)$ dans la pince (cf figure).



Question 1 :
Calculer le champ magnétique créé par $I(t)$ et $i(t)$, puis le flux total dans les N spires. En déduire la fonction de transfert $\underline{i}/\underline{I}$ en simplifiant quand N est grand. Intérêt(s) du dispositif ?

Soit un point M à l'intérieur de la bobine. Le plan méridien contenant M et l'axe Oz est plan de symétrie. Le champ magnétique lui est donc orthogonal : c'est un champ orthoradial. L'invariance par rotation a pour conséquence que le module du champ ne dépend pas de l'angle θ des coordonnées cylindriques. Ecrivons donc $\overrightarrow{B}(M) = B(r,z)\,\overrightarrow{e_\theta}$.

Soit $\mathcal{C}$ le cercle d'axe Oz, de rayon r passant par M ; la circulation de $\overrightarrow{B}$ le long de $\mathcal{C}$, dont la portion élémentaire est orthoradiale ($\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}\ell\,\overrightarrow{e_\theta}$), est

$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \oint_{\mathcal{C}} B(r,z)\,\overrightarrow{e_\theta}\cdot\mathrm{d}\ell\,\overrightarrow{e_\theta} = \oint_{\mathcal{C}} B(r,z)\,\mathrm{d}\ell = B(r,z)\oint_{\mathcal{C}}\mathrm{d}\ell = 2\,\pi\,r\,B(r,z)$$

Le courant enlacé est celui qui traverse le disque de rayon r, c'est-à-dire le courant $I(t)$ traversant le fil et, puisque M est dans la bobine, N fois le courant $i(t)$ passant dans le côté intérieur des spires (le courant traversant le côté extérieur passe en dehors du disque dans ce contexte). Le théorème d'Ampère conduit alors à

$$\overrightarrow{B}(M,t) = \frac{\mu_0\,(I + N\,i)}{2\,\pi\,r}\,\overrightarrow{e_\theta}$$

Le flux Φ à travers la bobine est N fois le flux φ à travers une spire que l'on calcule par intégration puisque $\overrightarrow{B}$ n'est pas uniforme :

$$\Phi = N\iint_{\text{carré}}\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = N\iint_{\text{carré}} B(r,z)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}z = N\,\frac{\mu_0\,(I+N\,i)}{2\,\pi}\int_{-a/2}^{a/2}\mathrm{d}z\int_a^{2\,a}\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

$$\Phi = \frac{\mu_0\,N\,(I+N\,i)\,a\,\ln 2}{2\,\pi}$$

Il en résulte une force électromotrice $e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ dans la bobine de résistance R ; les lois de l'électrocinétique permettent d'écrire

$$R\,i = e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

soit en notation complexe

$$R\,\underline{i} = -\jmath\,\omega\,\frac{\mu_0\,N\,(\underline{I}+N\,\underline{i})\,a\,\ln 2}{2\,\pi}$$

Dans la pratique N est choisi grand pour que $\omega \, \frac{\mu_0 \, N^2 \, i \, a \, \ln 2}{2\,\pi}$ soit grand devant $R\,i$ ce qui est aisé grâce au facteur N^2 ; alors en négligeant $R\,i$ et en simplifiant, on a tout simplement :

$$\underline{I} + N\,\underline{i} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad i = -\frac{I}{N}$$

Ce dispositif permet une mesure aisée des courants intenses et par ailleurs, contrairement à un ampèremètre classique qui se branche en série, nul n'est besoin d'ouvrir le circuit pour y intercaler l'ampèremètre, ce qui est certes aisé en travaux pratiques mais beaucoup moins sur une installation industrielle. Enfin, en permettant la mesure de I avec un instrument d'aspect totalement différent d'un voltmètre numérique, il aidera les petits collégiens à comprendre que différence de potentiel et intensité sont deux grandeurs fondamentalement différentes.

Question 2 :
Pourquoi n'a-t-on pas tenu compte de l'inductance de la bobine ?

Bien sûr qu'on en a tenu compte ! Le flux Φ est somme du flux «extérieur» créé par I, $\Phi_{ext} = \frac{\mu_0 \, N \, I \, a \, \ln 2}{2\,\pi}$ et du flux propre créé par i, $\Phi_{propre} = \frac{\mu_0 \, N^2 \, i \, a \, \ln 2}{2\,\pi}$ qui est par définition le produit $L\,i$. On a écrit plus haut $R\,i = e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$; détaillons :

$$R\,i = e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{ext}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\Phi_{propre}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{ext}}{\mathrm{d}t} - L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$\text{soit} \qquad R\,i + L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{ext}}{\mathrm{d}t}$$

On a donc bien tenu compte de l'inductance de la bobine !

Question 3 :
La géométrie des spires de la bobine est-elle importante ?

NON ! Le champ est, de par le théorème d'Ampère, proportionnel à $I + N\,i$ et, quelle que soit la géométrie de la bobine, il en sera de même pour Φ qui sera de la forme $\Phi = K\,N\,(N + N\,i)$ où K est un facteur géométrique. Dès lors que $\omega\,N^2\,K$ est grand devant R, ce qui précède reste valable.

Question 4 :
Est-il nécessaire que le fil soit rectiligne infini ? On s'aidera des propriétés de la matrice inductance.

NON PLUS ! Mais c'est plus subtil à montrer. Le fil prétendument rectiligne est une portion d'un circuit parcouru par I et le flux extérieur défini plus haut est le flux créé par ce second circuit dans la bobine et l'on sait qu'il s'écrit $M\,I$ où M est le coefficient de mutuelle inductance. Si nous montrons que M est indépendant de la forme précise du fil nous aurons gagné.

Or la matrice inductance est symétrique, c'est le cours qui l'affirme. L'astuce suprême consiste à trouver M en calculant le flux $M\,i$ qu'envoie la bobine à travers le second circuit. La bobine crée un champ $\overrightarrow{B}(M,t) = \frac{\mu_0 \, N \, i}{2\,\pi\,r} \, \overrightarrow{e_\theta}$ à l'intérieur de la bobine (cf supra) et nul ailleurs (en se persuadant que dans tous les autres cas le courant enlacé est nul). Si le fil ne traverse qu'une fois la bobine, une surface appuyée sur le second circuit est traversée par un flux nul là où $\overrightarrow{B}$ est nul et un flux non nul là où elle est traversée par la bobine soit sur une surface confondue avec celle d'une spire. Quel que soit ce flux, il ne dépend pas de la forme précise du circuit car ses frontières sont dans la zone de champ nul et n'influencent donc en rien le résultat.